Teorema

L'inversa di f continua e iniettiva è continua.

— Fine continuità —

Limiti Notevoli

$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$ → F.I. $\frac{0}{0}$ con cambio di variabile.

- $\arcsin(x) = y \to \sin(y) = x$

[redacted] $x \to 0$, $\sin(y) \to 0$, $y \to 0$

[redacted] $\frac{y}{\sin(y)} = 1$ (è l'inverso di $\frac{\sin x}{x}$)

- $\lim_{x\to 0^+} x^b \log x$, con $b>0$ → F.I. $0\cdot\infty$

$= 0$

- $\lim_{x\to\infty} x^b \log x$, $b>0$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0$ $\quad b>0$, $a>1$

- $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^x = e^b$

cambio di variabile: $\frac{b}{x} = y \to x = \frac{b}{y}$

quindi $\lim_{y\to\infty} (1+y)^{\frac{b}{y}} = \left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^b \to e^b$

- $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Dimostrazione facendo la quella sulle successioni

Esempi

[redacted] $f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{e^{x+1}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{e^{\sqrt{2}+1}}$

Non approssimare a caso!

- $\lim_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Infatti $= \frac{1}{x}\cdot \ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln(e) = 1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} \cdot \ln a$

$a^x - 1 = z \quad a^x = z+1$

$\log_a(a^x) = \log_a(z+1)$ [redacted]

$x \log_a(a) = \log_a(z+1) \to x = \log_a(z+1)$

$\log_a(1+z) = $ [redacted] $\frac{\ln(1+z)}{\ln(a)}$ →

$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\log_a(1+z)} \to \lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\ln(1+z)} \cdot \frac{\ln a}{\ln a}\right) \cdot \lim_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{\ln(1+z)}$ ·

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \Rightarrow$ Vicino a 0 l'esponenziale è simile al polinomio.

$e^x - 1 \sim x \Rightarrow e^x \sim x+1$

- [redacted] $\ln(1+x) \overset{x\to 0}{\sim} x$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Esercizio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)} - \sqrt{1-\operatorname{tg}(x)}}{\sin(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{FI}$$

↓ moltiplichiamo tutto per le radici e dividiamo

$$\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)} - \sqrt{1-\operatorname{tg}x}}{\sin(x)} \cdot \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x} + \sqrt{1-\operatorname{tg}(x)}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}x} + \sqrt{1-\operatorname{tg}x}} =$$

$$\frac{\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}\right)^2 - \left(\sqrt{1-\operatorname{tg}x}\right)^2}{\sin x\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}x} + \sqrt{1-\operatorname{tg}x}\right)} = \frac{1+\operatorname{tg}x - 1 + \operatorname{tg}x}{\sin x\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}x} + \sqrt{1-\operatorname{tg}x}\right)} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}(x)}{\sin\left(\sqrt{\ }+\sqrt{\ }\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{tg}x}{2 \sin x} =$$

↓ mandiamo $x \to 0$, $\operatorname{tg}x \to 0$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sin}{\cos} \cdot \frac{1}{\sin} = 1$$

Quindi possiamo notare che $\sin x \underset{x\to 1}{\sim} \operatorname{tg} x$.

Esercizio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1+x^2} - 1}{x} = \frac{\sqrt{x+1+x^2} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1+x^2}+1}{\sqrt{x+1+x^2}+1} = \quad \text{FI: } \frac{0}{0}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+1+x^2}\right)^2 - 1}{x\left(\sqrt{x+1+x^2}+1\right)} = \frac{x+\cancel{1}+x^2-\cancel{1}}{x\left(\sqrt{x+1+x^2}+1\right)} = \frac{x^2+x}{x\left(\sqrt{x+1+x^2}+1\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+1+x^2}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

Si può notare che in questo esempio il confronto di velocità non avviene più di tanto.

Esercizio

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x = \quad \text{FI } {}^{+\infty}_{-\infty}$$

$a-b \cdot a+b$ non elimina la radice cubica, mi serve qualcosa del tipo $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} - x \cdot \frac{\left[\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3+x^2} + x^2\right]}{\left[\quad // \quad\right]} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^3 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+x^2} + x^2} = \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

Questi tre addendi si comportano, all'infinito, come x^2. Non è un passaggio algebrico, ma al limite.

Esercizio

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+x+x^2}{x^2}\right) \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+1} = 1$$

($\operatorname{sen}^2 x$: oscilla tra 0 e 1)

$\left(\frac{1+x+x^2}{x^2}\right)$: tende a 1

$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+1}$: tende a ∞

Esercizio

$$a_n = (-1)^n \left(\sqrt{n^5+2n+1} - \sqrt{n^5+1}\right) \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

1) trovare $\lim_{n\to\infty} a_n$

2) studiare quando $\{n^x a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in \mathbb{R}$

trovare max lim e min lim.

Calcoliamo il limite:

- $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \to \cos(0) \to 1$
- $\sqrt{n^5+2n+1} - \sqrt{n^5+1} \to$ FI: $+\infty - \infty$

Risolviamo la forma indeterminata, razionalizzando

$$\sqrt{n^5+2n+1} - \sqrt{n^5+1} \cdot \frac{\sqrt{n^5+2n+1} + \sqrt{n^5+1}}{\sqrt{n^5+2n+1} + \sqrt{n^5+1}}$$

$$\cong \frac{\cancel{n^5}+2n+1-\cancel{n^5}-\cancel{1}}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }} \cong \frac{2n}{\sqrt{n^5+2n+1}+\sqrt{n^5+1}} \cong 0$$

$\cong$ den $\cong 2n^{5/2}$, quindi è più veloce di $2n$

Parte (2)

Riscriviamo il limite tramite l'approssimazione trovata:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(\frac{2n}{2n^{\frac{5}{2}}} \right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n^{\frac{5}{2}}} \right) n^x = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot n^{1-\frac{5}{2}} \cdot n^x = \lim_{n\to\infty} (-1)^n n^{x-\frac{3}{2}} = 0$$

- $x - \frac{3}{2} = 0 \to$ se $x = \frac{3}{2} \to \lim_{n\to\infty} (-1)^n =$ indeterminata ma non limitata (oscilla tra -1 e $+1$)
- $x - \frac{3}{2} > 0 \to$ se $x > \frac{3}{2} \to$ indeterminata non limitata
- $x - \frac{3}{2} < 0 \to$ se $x < \frac{3}{2} \to (-1)^n \cdot 0 \rightleftharpoons 0 \to$ converge.

Ricordo max lim e min lim.

Esercizio

$a_n = (-1)^n \sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

1) $\lim_{n\to\infty} a_n$

2) $(1 + a_n)^{n^x} \quad x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{1} + \sqrt{1}}\right) \simeq \left(\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \simeq \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \simeq$$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = 0$$

Parte (2)

- $\lim_{n\to\infty} \left[1 + (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)\right]^{n^x} = ?$ dipende da come va ad infinito FI

Ricondurremo al limite notevole neperiano...

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{\frac{1}{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)}}\right]^{n^x} = \left[\ //\ \right]^{\frac{n^x}{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)}} \cdot (-1)\sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{(-1)^n \frac{1}{n} \cdot n^x \cdot \sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)}$$

Studiamo il limite dell'esp.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n^x \cdot \sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n n^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} =$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \simeq \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \text{per } n\to\infty}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2} n^{x-\frac{1}{2}}$$

Ora tutto dipende da x:

- $x - \frac{1}{2} = 0 \to x = \frac{1}{2} \to \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2} n^0 =$ indeterminato, oscilla tra $\pm\frac{1}{2}$
- $x - \frac{1}{2} > 0 \to x > \frac{1}{2} \to$ lim indeterminato ma limitato
- $x - \frac{1}{2} < 0 \to x < \frac{1}{2} \to$ lim tende a $0 \to$ converge.

Ora ripartiamo tutto dell'esponente:

- $x = \frac{1}{2} \to e^{\frac{(-1)^n}{2}}$ oscilla tra $e^{\frac{1}{2}}$ e $e^{-\frac{1}{2}}$ (↑ max lim, ↑ min lim)
- $x > \frac{1}{2} \to e^{\frac{(-1)^n}{2} \cdot +\infty}$ oscilla tra e^{∞} e $e^{-\infty}$ (↓ ∞, ↓ 0)
- $x < \frac{1}{2} \to e^0 \to 1$ convergente

Derivata

$$f: X \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in X,\ h \in \mathbb{R} \mid x_0 + h \in X$$

Studiamo il rapporto incrementale di f in x_0:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Tale misurazione può essere effettuata in qualunque funzione, poiché definita in x_0 ed in x_0+h. Non è necessario che sia continua o derivabile o altro.

Mi chiedo cosa succeda per $h \to 0$, quindi studio il limite del rapporto incrementale.

Se $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$ esiste, ed è, e lo chiamo derivata di f.

$f'(x_0)$ è un numero.

Si denota anche come $\frac{df}{dx}$.

Definizione

Presa una funzione $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, $h \in \mathbb{R}$ tale che $x_0+h \in X$. Se esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ per $h \to 0$, allora dico che f è derivabile in x_0 e chiamo tale numero derivata di f in x_0 e lo denoto come $f'(x_0)$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$$

Può essere fatto per qualunque funzione.

Le derivate nasce da una necessità applicative relative alla misura di variazioni di grandezze.

velocità

$$V_m = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}, \quad V_{ist} = \lim_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

accelerazione

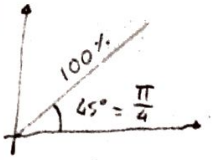
$$a_m = \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} \qquad a_{ist} = \lim_{t\to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

densità

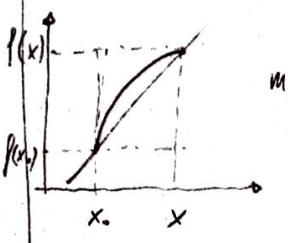
$$\rho_m = \frac{m(V)-m(V_0)}{V-V_0}$$

pendenza

$$\frac{h(s)-h(s_0)}{s-s_0}$$



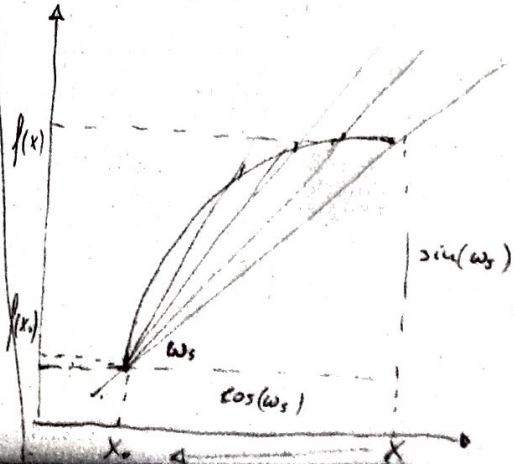
Motivazione Geometrica



$$m_s = -\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{y-y_0}{x-x_0}$$

$$m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$$

Il rapporto incrementale misura quindi il coefficiente angolare della retta (secante) che attraverso i punti (x, y) e (x_0, y_0).



Al tendere di x ed x_0 la secante tende a diventare la tangente alla curva nel punto x_0.

$$m_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ω_s = angolo con la sec.

ω_t = angolo con la tangente

(!) Errore classico: cosa rappresenta la derivata? La tangente! No!

Sì: il coefficiente angolare della tangente alla curva nel punto x_0.

Sia ω_s...

l'angolo che la secante forma con l'asse x,

~~determinata ω_s~~

della f

$$m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin(\omega_s)}{\cos(\omega_s)} = tg(\omega_s)$$

$$m_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin(\omega_t)}{\cos(\omega_t)} = tg(\omega_t)$$

Quindi un'altra formulazione di derivata è quella di considerarla la tangente trigonometrica dell'angolo ω_s.

Se una funzione è derivabile in un punto, significa che in tale punto la tangente esiste.

Se f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0.

Teorema

Derivabilità in $x_0 \Rightarrow$ continuità in x_0

Dimostrazione

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$? cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$.

Consideriamo $f(x) - f(x_0) \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$

$\lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \to f'(x_0) \cdot 0 = 0.$

Per ipotesi $f'(x) \in \mathbb{R}$.

Non è detto però che se una funzione sia continua in x_0, abbia anche derivata in x_0.

Controesempio ($\not\Leftarrow$)

$f(x) = |x|$

$|x|$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ ma non è derivabile nell'origine.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases} \quad \nexists \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

quindi non esiste $f'(0)$ per $|x|$.

$\exists f'_+ \neq f'_-$

(!) Non dire che "Una funzione derivabile è continua"... Derivabile $\Rightarrow$ continua (se i punti sono gli stessi).

Teorema

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$\iff \exists f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

Definizione:

Derivabilità sul dominio

f è derivabile su X se lo è $\forall x \in X$

Esempio

$f = \text{const} = c$ sono sempre derivabili.

Infatti $\frac{c - c}{x - x_0} = 0$ (ancora prima di fare il limite)

Esempio

$f(x) = x \quad \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$

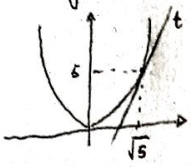
Cioè troviamo il coeff. angolare della bisettrice.

Esempio

$y = x^2$ [redacted] $\frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0}$

$\lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0 \qquad (x^2)' = 2x$

Abbiamo ottenuto una nuova funzione, lasciando x_0 non assegnato.



$m_t = 2 \cdot \sqrt{5}$

$y - y_0 = m_t (x - x_0)$

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$\downarrow$

$r_t = y - 5 = 2\sqrt{5}(x - \sqrt{5}) \to y = 2\sqrt{5}x - 5$

~~Esempio~~ Derivata di x^n

$f(x) = (x^n)' \longrightarrow (x^n)' = nx^{n-1}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

Binomio di Newton

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k\right) - x^n}{h} =$$

$$= \frac{x^n - x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + h^n}{h} = \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot h}{h} = nx^{n-1}$$

Derivata di $\sin(x)$

$f(x) = \sin(x) \qquad f'(x) = \cos(x)$

$$\frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \frac{2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{x - x_0} = 1 \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{\cos\left(\frac{2x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \cos(x_0)$$

Non derivabilità

1) $\nexists \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ * con x_0 punto di non derivabilità.

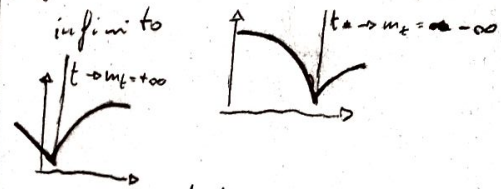
2) f (i.e. angolosi) sia continua in x_0, ma

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h+x) - f(x)}{h} \neq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h+x) - f(x)}{h}$$

e quindi $f'_+(x) \neq f'_-(x)$

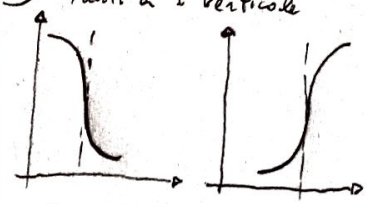
— oppure —

[redacted] f continua ma coeff. angolare infinito

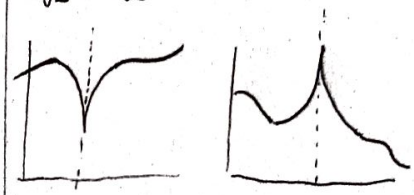


[redacted] detti "punti angolosi".

3) Punti a t verticale



4) $f'_+ = +\infty$ (p. di cuspide).
$f'_- = -\infty$ ° viceversa



Di certo 2, 3, 4 non si trovano ai confini del dominio. Quando si calcola la derivata, i punti che la rendono non definita, sono ottimi candidati per trovare situazioni di questo tipo.

2) se [redacted] $m_{t-} \neq m_{t+} \to$ p. angoloso
3) se $m_{t+} = m_{t-} = \pm\infty$ [redacted] $\to$ p. a t. verticale
4) se $m_{t+} = \pm\infty \wedge m_{t-} \neq \infty \to$ p. cuspide

Tuttavia 2, 3 e 4 necessitano che la f sia continua.

Analisi (49)

Quindi si chiamano p. di non derivabilità, solo i casi 2, 3, 4!

Algebra Derivate

1) $(cf)' = cf'$

2) $(f \pm g)' = f' + g'$

3) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$, $g \neq 0$

Dimostrazione

1) caso particolare di (2)

2) sia $w = f+g \rightarrow \frac{w(x+h) - w(x)}{h} = \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} =$

$= \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$

$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \rightarrow f'(x) + g'(x)$

3) $w = fg \rightarrow \frac{w(x+h) - w(x)}{h} = \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} =$

$= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$

$= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \pm f(x)g(x)}{h} =$

$= \frac{g(x+h)[f(x+h) - f(x)]}{h} + \frac{f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} \Rightarrow$

$\Rightarrow \xrightarrow{h \to 0} g(x+0)f'(x) + f(x)g'(x)$

tuttavia $g(x+h) \xrightarrow{h \to 0} g(x)$ solo se g è continua.

Ma poiché g è derivabile è anche continua, !

Quindi diventa $g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$.

4) $w = \frac{f}{g} \rightarrow w(x+h) - w(x)$.

Per semplicità omettiamo momentaneamente il denominatore:

$\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x)}{g(x+h)g(x)}$

Nel compito queste cose valgono meno, quindi conviene farle se sono semplici o se si ha tempo

Es 1 → 1,5 pt.

Inseriamo il denominatore:

$\frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)g(x)} =$ Aggiungiamo e togliamo...

$= \frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x) \pm f(x)g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)g(x)} =$

$= \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h} - \frac{f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)g(x)} \rightarrow$

$\xrightarrow{h \to 0} g(x)f'(x) - f(x)g'(x) \cdot \frac{1}{g(x) \cdot g(x)} =$

$= \frac{gf' - fg'}{g^2}$

Ricorda: in 3) e 4) abbiamo aggiunto e tolto $f(x)g(x)$ per raccogliere i fattori.

La 1) usa il prodotto, quindi $cf' + c'f$ ma $c' = 0$, quindi $(cf)' = cf'$.

Considerando 1) e 2) $\Rightarrow af + bg$ è ancora derivabile. $(af + bg)' = af' + bg'$.

Sia $C^k(X)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni derivabili k volte in X e la cui derivata ~~sia continua~~ k-esima continua.

$C^\infty(X)$ è lo sp. vec. delle fun. infinitamente derivabili.

$C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \ldots \supset C^\infty$

Esempio

$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} =$

$\frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

Ricorda che $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Esempio

$(\cot g\, x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Esempio

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Non si può dimostrare con il binomio di Newton, come avevamo fatto nel caso $\alpha \in \mathbb{N}$.

$$\frac{(x+h)^\alpha - (x)^\alpha}{h} = \frac{x^\alpha\left[\left(\frac{x+h}{x}\right)^\alpha - 1\right]}{h} =$$

$$= \frac{x^\alpha\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1\right]}{h}.$$ Studiamo il limite, lasciando fuori x^α, che non dipende da h.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}\cdot x} = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0}\left[\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}}\right]$$

Lim. Notevole ☞

$\frac{h}{x} := y \to$ [redacted] $\frac{(1+y)^\alpha - 1}{y}$;

$(1+y)^\alpha := z \to (1+y)^\alpha = 1+z \to$

$\to \ln[(1+y)^\alpha] = \ln[(1+z)] \to \alpha \ln[(1+y)] = \ln(1+z)$

Molt e div per $\ln(1+z)$...

$$\frac{z}{\ln(1+z)} \cdot \frac{\ln(1+z)}{y} = \frac{z}{\ln(1+z)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+y)}{y}$$

Se $h\to 0$, $y\to 0$ e $z \to 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1 \qquad \lim_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1$$

Quindi per $h\to 0 = \alpha$

Quindi risulta $\alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$

Esempio

$y = e^x$

$(e^x)' = a^x \ln e$

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

Sost. variabile: $a^h - 1 = z \to a^h = 1+z$

$$\log_a(a^h) = \log_a(1+z)$$

$$h \log_a(a) = \log_a(1+z)$$

$$h = \log_a(1+z)$$

$\frac{a^x \cdot z}{h}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^x \cdot z}{\log_a(1+z)}, \text{ per } h\to 0,\ z\to 0$$

Lim. Notevole ☞

$$\lim_{z\to 0} \frac{a^x \cdot z}{\log_a(1+z)} = a^x \cdot \ln(a)$$

Se $a = e \to e^x \cdot \ln e = e^x$

Esempio

$y = \log_a(x)$

$\left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{x \ln(a)}$

$$\frac{\log_a(x+h) - \log(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} =$$

Sost. variabile: $y = \frac{h}{x}$, $h\to 0$, $y\to 0$

Lim. Notevole ☞

$$= \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(1+y)}{y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$$

Se $a = e \to \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{x}$

Analisi (51) – (54) back

$$D(f) = f', \qquad D: C^1(X) \longrightarrow C^0(X)$$
$$f(x) \longmapsto f'(x)$$

Funzioni diverse possono avere la stessa derivata.

D è una funzione che associa funzioni derivabili a funzioni continue.

D non è iniettiva nè suriettiva, quindi non è invertibile. Questo sarà un problema quando andremo a studiare gli integrali, poichè tale studio passa per la ricerca di una funzione che derivata dia la funzione data.

Definizione Primitiva

$F(x)$ si dice primitiva di $f(x)$, se $F'(x) = f(x)$

Esistono infinite primitive per ogni funzione, quindi possiamo trovare una primitiva o una famiglia di primitive. Infinità non numerabile.

Esempio

$$F'(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + c$$

Derivata di Funzione Composta.

Teorema

Premessa

Prendo $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile. Poichè è derivabile, $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$.

Probabilmente $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon(h)$.

Dove $\varepsilon(h)$ è una fun. dipendente da h e di cui so che per $h \to 0$, $\varepsilon(h) \to 0$.

$\varepsilon(h)$ misura l'errore che commetto sostituendo la derivata col rapporto incrementale.

Posso inoltre dire che $\varepsilon(0) = 0$, quindi richiedo che sia continua in 0.

Enunciato

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ e $g: (c,d) \to \mathbb{R}$.

$\mathrm{Im}_f \subseteq (c,d)$. f e g sono derivabili, ciascuna nel proprio dominio.

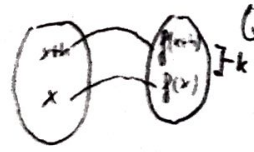
$g \circ f = g(f)$

Allora $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Dimostrazione

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \qquad \begin{array}{l} (a,b) \to (c,d) \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto y = f(x) \longmapsto \end{array}$$

$$= g'(y) + \varepsilon(k)$$



Quindi $f(x+h) - f(x) = k$.

Quando $h \to 0$, $k \to 0$ ma non è automatico, lo sappiamo perchè f è una fun. continua, altrimenti non sarebbe vero.

$\varepsilon(k) \xrightarrow{h\to 0} 0$

Inoltre $\frac{k}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \xrightarrow{h\to 0} f'$

Ho quindi scoperto che:

- $\varepsilon(k) \xrightarrow{h\to 0} 0$
- $\frac{k}{n} \xrightarrow{h\to 0} f'$

$$\frac{g(y+k)-g(y)}{k} = \frac{g\left(f(x)+f(x+h)-f(x)\right)-g\left(f(x)\right)}{k} =$$

⚠ Errore Grave ☞

$g'(f(x)) + \varepsilon(k) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(f(x+h)) - g(f(x)) = k g'(f(x)) + k\varepsilon(k) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h} = \frac{k g'(f(x)) + k\varepsilon(k)}{h} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k}{h} g'(f(x)) + \frac{k}{h}\varepsilon(k)$

↑ Sul primo membro non sappiamo nulla, quindi sfruttiamo il secondo membro

⇓

$f'(x) g'(f(x)) + f(x)\cdot 0$

⇓

$f'(x) g'(f(x))$

☞ Indago una cosa che non conosco studiando una che conosco.

Errore frequente:

Usare il primo membro per ottenere informazioni negli ultimi passaggi. Sul primo membro non possiamo dire nulla sinché non siamo a conoscenza del risultato al secondo membro.

$\varepsilon(h)$ continua in 0 serve per evitare problemi nel caso in cui $h = 0$.

Esempio

$f(x) = \ln(\sin^2 x)$

$f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot (\sin^2 x)' = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cdot (\sin x)' =$

$= \frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cdot \cos x = 2\frac{\cos x}{\sin x}$

Esempio

$f' \quad (e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$ ✓

Errori comuni:

- e^{2x} NO
- $2e^{2x-1}$ NO
- e^2 NO

Esempio

$(x^x)'$

Non possiamo usare né la derivata di esp. né quella di pow.

$x^x = e^{\ln(x)^x} = e^{x\cdot \ln(x)} \rightarrow$

$(x^x)' = e^{x\cdot\ln(x)} \cdot (x\ln x)' =$

$= e^{x\ln(x)} \cdot \ln x + \frac{x}{x} = e^{x\ln x}\left(\ln(x)+1\right)$

Back

Analisi (S3) – (S2) ou Front

Derivata di funz. inversa

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ $\qquad y = f(x)$

1) f derivabile in $x_0 \in (a,b)$
2) f strettamente monotona

allora – $g = f^{-1}$ è derivabile

– $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$$

Poichè $g(y_0) = x_0$ e $g(y) = x$, quindi riscriviamo tutto...

$$\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$$

Si nota che è l'inverso algebrico del rapporto incrementale di f. Vediamo al limite, che esista e sia finito

$$\lim_{y\to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Quando $y \to y_0$, poichè g' è l'inversa di una funzione f continua e monotona, anche g è continua, quindi per $y \to y_0$, $g(y) \to g(y_0)$ ma allora $x \to x_0$. Riscriviamo...

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

Non siamo autorizzati a fare inferenze sul primo membro.

Non è ovvio, bisogna fare questa considerazione.

Esempio

$$(\operatorname{arc\,sen}(y))' = \frac{1}{(\operatorname{sen}(x))'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} =$$

$y = \operatorname{sen}(x)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Esempio

$$(\operatorname{arc\,cos}(y))' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Esempio

$$(\operatorname{arc\,tg}(y))' = \frac{1}{(\operatorname{tg}(x))'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} =$$

$y = \operatorname{tg}(x)$

$$= \frac{1}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(x)} =$$

$$= \frac{1}{y^2}$$

Differenziabilità

Concetto legato a derivabilità.

Se f è derivabile in x allora posso scrivere $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon(h)$

$$f(x+h) - f(h) = h f'(x) + \varepsilon(h) h$$

Ma $\varepsilon(h)\cdot h$ è un $o(h)$. (o-piccolo)

$f(x+h) - f(h) = \Delta f$.

Riscriviamo

$$\Delta f = f'(h)h + o(h)$$

$f'(h)\cdot h$ è detta parte lineare in h.

Parte lineare in h, cioè proporzionale ad h linearmente.

Definizione Differenziale

f si dice differenziabile in x se

$\Delta f = Ah + o(h)$ con $A \in \mathbb{R}$,

e la quantità Ah la chiamiamo differenziale di f in x.

Denotiamo $Ah = df$.

Osservazione

Per le funzioni derivabili $f'(x) = A$. Quindi tutte le funzioni differenziabili sono derivabili.

Osservazione

Le funzioni derivabili sono anche differenziabili

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{Ah}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h}$$

$\lim_{h\to 0} \frac{|o(h)|}{h}$ tende a 0 per def. o-piccolo.

Quindi $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} = A \Rightarrow f'(x) = A$

Non è vero in generale, ma solo per funzioni in una variabile.

Esempio

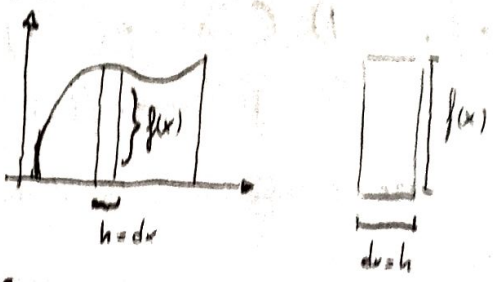
$df = f'(x) \cdot h$

Se $f(x) = x \Rightarrow df = 1 \cdot h = h$

$dx = h$

dx è il differenziale della variabile dipendente.

Esempio



$\int f(x)\,dx$

Il differenziale misura la differenza tra essere una curva e la tangente che approssima la curva.

$\Delta f = f'(x)h + o(h)$

$df = f'(x)h + 0$ l'errore va a zero all'operazione al limite.

Il differenziale lo useremo quando faremo il cambio di variabile negli integrali.

Esempio

$dy = d[f(x)] = f'(x) \cdot dx$

Fondamentale

Teoremi sulle derivate

Th. di Fermat

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a,b)$

e sia x_0 un punto di estremo (max o min relativo), allora $f'(x_0) = 0$.

Quindi la tangente geometrica nel punto è orizzontale.
Non è vero il contrario, solo che se ho un min o un max allora in tale punto la tangente è orizzontale.
Utile strumento per trovare max e min relativi.
I punti in cui la derivata si annulla sono candidati ad essere massimi e minimi.

Definizione P. Stazionari

I punti in cui la derivata è nulla, si dicono punti stazionari.

Dimostrazione Th. Fermat.

Sia x_0 un punto di max (min) relativo,

cioè $\exists U_{x_0} \mid f(x) \leq f(x_0)$ $\left(f(x) \geq f(x_0)\right)$ $\forall x \in U_{x_0} \cap (a,b)$

Def. max/min rel.

L'intersezione con (a,b) è importante perché la funzione sia definita.

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Studiamo il segno del rapporto e secondo che sia a destra o a sinistra del punto x_0.

Sia x_0 un p. di max

Per $x > 0 \to$ [redacted] rapp. incr. ≤ 0 num ≥ 0, den ≤ 0

Per $x < 0 \to$ rapp. incr. ≥ 0 num ≥ 0, den ≥ 0

Per il Th. della permanenza del segno, il limite manterrà i segni. Poiché per ipotesi [redacted] f è derivabile in x_0, allora la derivata destra e quella sinistra sono uguali.

Poiché sono una ≥ 0 e l'altra ≤ 0, allora devono coincidere in 0, quindi

$$f'(x_0) = 0$$

!\ Errore Classico: dire la derivata "del" punto x_0 è sbagliato! Si dice la derivata "nel" punto x_0.

Osservazione

Th. Fermat è una condizione necessaria ma non sufficiente affinché x_0 sia un punto di max (min).

Controesempio

$y = x^3$ $\quad f'(x) = 3x^2$ $\quad f'(x) = 0$

$3x^2 = 0$ se $x = 0$

Ma in $x = 0$ non è né max né min, ma solo p. stazionario.

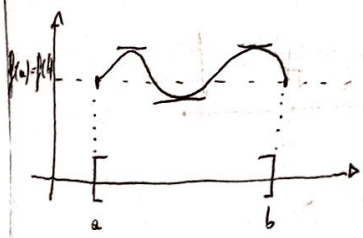
Teorema di Rolle

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ con

1. f continua in $[a,b]$
2. f derivabile in (a,b)
3. $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists c \in (a,b) \mid f'(c) = 0$

Significato geometrico:



Dimostrazione

Siccome f è continua in $[a,b]$, per il th. di Weierstrass ha max e min.

Diverse possibilità:

1. se max f = min f $\to$ f costante $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$
2. se max $>$ min $\to$ almeno uno è un punto interno ad (a,b). Ma allora, per il th. di Fermat $\exists c \mid f'(c) = 0$, $c \in (a,b)$.

Controlliamo che le ipotesi siano verificate per Fermat.

Questo th. è una condizione sufficiente per garantirmi la tangente orizzontale.

Quindi $\exists$ fun che hanno tangente orizzontale anche senza rispettare le ipotesi!

Esempio

$|x|$ non rispetta la 2. del th. di Rolle, infatti non è derivabile in $f(0)$, ma ha tangente orizzontale in $x = 0$.